Ejercicios Resueltos

A

Física I

2^{da} Parte del Parcial

Con ejercicios de las guías de "**Sistemas de partículas**" y "**Cuerpo Rígido**"

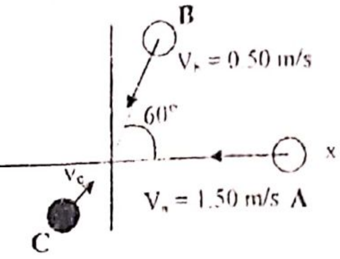
2da Parte del Primer parcial

Temas de las guías Sistema de Partículas y Cuerpo Rígido

Tema 1 PRIMER PARCIAL FISICA I Turno 01 Ing. Menikheim

Indicaciones: Antes de comenzar *lea cuidadosamente* los enunciados. Responda a los requerimientos de cada ejercicio *justificando claramente los pasos seguidos*. Cada hoja debe tener *nombre, número de padrón, número de grupo y tema*. En todos los casos *obtenga la expresión algebraica* de la solución pedida y luego reemplace por los números indicados.

1) Las esferas A, de 0.02 Kg.; B, de 0.03 Kg. Y C de 0.05 Kg. Se acercan al origen deslizándose sobre una mesa sin fricción. Las velocidades de A y B se indican en la figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y se pegan. ¿Qué componentes x, y debe tener la velocidad inicial de C si los 3 objetos quedan en reposo después del choque?



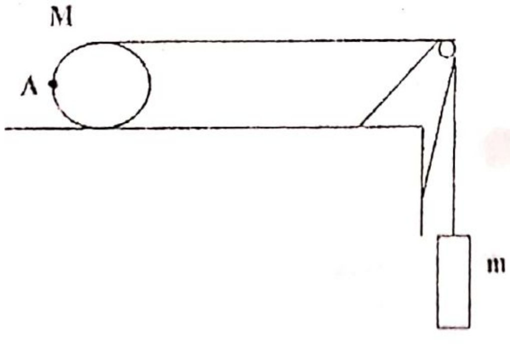
2) Un vagón vacío con una masa de 10^5 kg pasa debajo de un depósito de carbón con una velocidad constante de 0.5 m / s . Si en el tiempo que pasa por el depósito se le carga con 2.10^5 Kg. De carbón. A) ¿Cuál será la velocidad final del vagón? B) ¿Qué fuerza debería aplicarse al vagón para que mantuviera su velocidad constante? $L_{vagón} = 20\,m$

3) Un hombre de 80.0 Kg. está de pie en el borde de una plataforma giratoria sin rozamiento de 1 metro de radio que está girando con una velocidad angular de 1.0 1/s. Si el hombre salta con una velocidad relativa a la plataforma de 2 m/s en el sentido opuesto al del giro de la misma.

a) ¿Qué cantidades se conservan?
b) ¿Cuál será la velocidad angular final de la plataforma si su radio de giro baricéntrico es de 2 m y su masa de 100 Kg.? Justifique sus respuestas.

4) En el sistema representado en la figura: M = 1.0 Kg; m = 0.2 Kg; r = 0.2 m. Calcule:

a) La aceleración de m
b) La aceleración del cm del cilindro de masa M.
c) La aceleración angular del cilindro.
d) La tensión en la cuerda despreciando la masa de la polea
e) La aceleración total del punto A



$$I_{cil}^{cm} = \frac{1}{2}MR^2$$

1) Como las esferas sólo interactúan entre ellas, y están aisladas del resto de universo, planteamos la conservación de la cantidad de movimiento en dos dimensiones para el sistema de las tres esferas:

$$\overbrace{\left(\vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C\right)_{final}}^{quedan\ en\ reposo\ =\ 0} = \left(\vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C\right)_{inicial}$$

$$\bar{O} = -0{,}02\ kg\ .1{,}5\ {}^{m}/_{seg}.\hat{i} \underbrace{-\,0{,}03\ kg\ .0{,}5\ {}^{m}/_{seg}.\cos(60).\ \hat{i} - 0{,}03\ kg\ .0{,}5\ {}^{m}/_{seg}.sen(60).\ \hat{j}}_{componentes\ de\ \bar{p}_B} + 0{,}05\ kg.\vec{v}_C$$

$$\xrightarrow{cuentas} \bar{O} = -0{,}0375\ kg.{}^{m}/_{seg}.\hat{i} - 0{,}013\ kg\ .{}^{m}/_{seg}.\hat{j} + 0{,}05\ kg.\vec{v}_C$$

$$\xrightarrow{despejo} \vec{v}_C = \frac{+0{,}0375\ kg.{}^{m}/_{seg}.\hat{i} + 0{,}013\ kg\ .{}^{m}/_{seg}.\hat{j}}{0{,}05\ kg} = \boxed{0{,}75\ {}^{m}/_{seg}.\hat{i} + 0.26\ {}^{m}/_{seg}.\hat{j}}$$

Estas son las dos componentes que forman el vector v_C que nos piden.

2) A) El sistema "vagón+carbón" se puede considerar un sistema aislado en la dirección horizontal, porque en el eje x no tenemos ninguna fuerza externa que actúe sobre el sistema. En el eje y, en cambio, tenemos la normal y el peso. Y como esas fuerzas no tienen porque ser iguales, es posible que la componente vertical de la cantidad de movimiento pueda cambiar. De hecho, eso es lo que ocurre: el carbón mièntras cae tiene componente vertical de velocidad, que luego pierde sin transferirla al vagón. Pero la componente horizontal de la cantidad de movimiento, como no hay fuerzas en ese eje, debe ser constante:

$$\left(\frac{d\vec{p}_{sist}}{dt}\right)_{eje\ x} = \underbrace{\sum_{eje\ x} \vec{F}}_{=0} \rightarrow \vec{p}_{sist_x} = cte \rightarrow M_{vag.}.\vec{v}_{vag,o} = \left(M_{vag.} + m_{carbón}\right)\vec{v}_f$$

Reemplazando los datos podemos despejar: $v_f = \dfrac{1.10^5\ kg.\ 0{,}5\ \frac{m}{seg}}{1.10^5\ kg + 2.10^5\ kg} = 0{,}1\bar{6}\ \frac{m}{seg}$

B) Para resolver este punto calculamos el tiempo que demora en pasar el vagón por la tobera donde se carga el carbón. Como en este punto nos piden que la velocidad se mantenga constante, voy as usar la ecuación del MRU:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20\ m}{0{,}5\ \frac{m}{seg}} = 40\,seg$$

Entonces, èn este lapso de tiempo, la fuerza necesaria se puede calcular como:

$$\vec{F}_x = \left(\frac{d\vec{p}_{sist}}{dt}\right)_{eje\ x} = \frac{d(m.v)}{dt} \xrightarrow{v = cte} = v.\frac{dm}{dt}$$

La variación de la masa es fácil de calcular cuando se supone que es dejada caer en forma uniforme; podemos sacarla haciendo el cociente entre el incremento de masa y el tiempo:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{3.10^5\,kg - 3.10^5\,kg}{40\ seg} = 5000\,\frac{kg}{seg} \rightarrow F_x = 0{,}5\frac{m}{seg}.5000\frac{kg}{seg} = 2500\ \text{N}$$

3) a) El sistema "plataforma+hombre" se encuentra aislado, ya que las fuerzas externas o bien se compensan, o bien no ejercen momento respecto del eje de giro. Por lo tanto, podemos decir que en la interacción entre el hombre y la plataforma se conserva el momento cinético "L_{sist}" (también se conserva p aunque eso no es importante para resolver el próximo punto).
En cambio, aunque las fuerzas sean internas, pueden ser no conservativas. Así que nada garantiza que se conserva la energía.

b) Por la constancia de L respecto del eje de giro podemos igualar:

$$L_f = L_o \rightarrow I_{plataf.}.\,\omega_{plataf.} + I_{Hombre}.\,\omega_{Hombre} = \left(I_{plataf.} + I_{Hombre}\right)\omega_o \qquad (\text{A})$$

Para poder reemplazar en esta igualdad vamos a sacar los momentos de inercia respecto del eje de giro:

$$I_{plataf.} \xrightarrow{cilindro} = \tfrac{1}{2}.M.R^2 = \tfrac{1}{2}.100\ kg\ .\ (2\ m)^2 = 200\ kg.m^2$$

$$I_{Hombre.} \xrightarrow{partícula} = M.d^2 = 80\ kg\ .\ (2\ m)^2 = 320\ kg.m^2$$

En este último caso se aproximó al hombre como partícula, y se usó para "d" la distancia al eje de giro, que coincide con el eje de la plataforma. Nos queda ser cuidadosos con el dato de la velocidad <u>relativa</u> con la que sale el hombre. En esta fórmula tenemos que poner la velocidad angular respecto a Tierra, por lo tanto vamos a considerar a la velocidad relativa como:

$$\vec{v}_{Hombre,\ plataf.} = \vec{v}_{Hombre,\ Tierra} + \vec{v}_{Tierra,\ plataf.} = \vec{v}_{Hombre,\ Tierra} - \vec{v}_{plataf.,\ Tierra}$$

Divido por el radio:

$$\frac{v_{Hombre,\ plataf.}}{R} = \frac{\vec{v}_{Hombre,\ Tierra}}{R} - \frac{\vec{v}_{plataf.,\ Tierra}}{R} \xrightarrow{datos} \frac{-2\ ^{m}/_{seg}}{2\ m} = \omega_{Hombre} - \omega_{plataf.}$$

Del lado izquierdo puse la velocidad relativa a la plataforma con un signo menos porque el enunciado dice que es opuesta a la que venía desarrollando el sistema (o sea a la inicial, a la cual consideré positiva). De aquí se despeja:

$$\omega_{Hombre} = \omega_{plataf.} - 1\ \frac{1}{seg}$$

Reemplazo en la ecuación (Å) de la conservación de L:

$$200\ kg.m^2.\ \omega_{plataf.} + 320\ kg.m^2.\overbrace{\left(\omega_{plataf.} - 1\ \frac{1}{seg}\right)}^{\omega_{Hombre}} = 520\ kg.m^2.1\ \frac{1}{seg}$$

Opero y despejo:

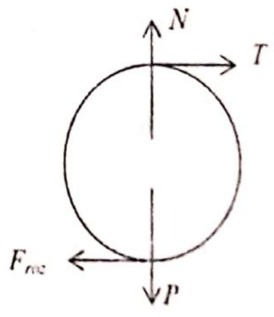
$$\underbrace{200\ kg.m^2.\ \omega_{plataf.} + 320\ kg.m^2.\omega_{plataf.}}_{520\ kg.m^2.\omega_{plataf}} - 320\ \frac{kg.m^2}{seg} = 520\ \frac{kg.m^2}{seg} \rightarrow \omega_{plataf.} = \frac{(520+320)\ \frac{kg.m^2}{seg}}{520\ kg.m^2} \approx 1{,}6\ \frac{1}{seg}$$

Como vemos, la velocidad angular de la plataforma se incrementó respecto del valor inicial. La del hombre, aunque no la piden, vale: $\omega_{Hombre} = \omega_{plataf.} - 1\ \frac{1}{seg} \approx 0{,}6\frac{1}{seg}$

Con ambas velocidades angulares se puede calcular la velocidad tangencial de la plataforma y del hombre, y verificar el valor relativo que nos dieron de dato.

4) Plateamos los diagramas de cada cuerpo, usando para las ecuaciones el sistema de referencia "solidario", es decir positivo para la derecha para "*M*", para abajo para "*m*", y para la rotación del cilindro "*M*" positivo el giro horario. De esta manera garantizo que las aceleraciones de los cuerpos y la angular del cilindro tienen el mismo signo (todas son positivas o todas son negativas).

- Para "*M*", tenemos la fuerza de rozamiento en el punto de contacto con el piso, el peso y la normal, y la tensión aplicada en el punto superior del cilindro:



$$x)\ T - F_{roz} = M.a_{cm}$$

$$y)\ N - P = 0$$

$$M)\ T.r + F_{roz}.r = \underbrace{\tfrac{1}{2}.M.r^2}_{I_{CM}}.\gamma$$

- Para "m" tenemos el peso y la tensión: $m.g - T = m.a_2$

Atención: como lo indica en el punto (d) la polea no tiene masa. Entonces es la misma tensión en toda la cuerda (cuando a la polea es difícil girarla porque tiene masa inercial, sabemos que eso no es cierto ya que tiene que tener un torque resultante). Planteemos las condiciones de vínculo para las aceleraciones. Para el cilindro, de la condición de rodadura sale la típica:

$$\omega.r = v_{CM} \xrightarrow{derivo} \gamma.r = a_{CM}$$

Recordemos que la primera igualdad expresa que en el punto más bajo la velocidad es nula (condición de rodar), por lo tanto la velocidad de traslación y la de rotación deben ser iguales y opuestas, de manera que la suma vectorial es cero. Por otra parte, para vincular el movimiento del cilindro con la masa "m" que cuelga, se debe ver que en el punto superior del cilindro la velocidad es el doble que la del CM. El motivo de esto es que la velocidad de ese punto es la suma de la rotación alrededor del CM más a de traslación:

$$v_P = v_{rot} + v_{CM} \xrightarrow{cond.\ de\ rodadura\ v_{rot}=v_{CM}} v_P = 2.v_{CM} \xrightarrow{derivo} a_P = 2.a_{CM}$$

La aceleración del punto superior "P" coincide en módulo con la de la masa "m", ya que son puntos vinculados por la soga inextensible. Reemplazando estas relaciones en las ecuaciones,, y simplificando, nos quedan:

$$(i)\ \ T - F_{roz} = M.a_{CM} \qquad (ii)\ \ T + F_{roz} = \tfrac{1}{2}.M.\cancel{r}\ \frac{a_{CM}}{\cancel{r}} \qquad (iii)\ \ m.g - T = m.\overbrace{2.a_{CM}}^{a_2}$$

Sumando miembro a miembro la (i) con la (ii): $2.T = \frac{3}{2}.M.a_{CM} \rightarrow T = \frac{3}{4}.M.a_{CM}$

Sumo con (iii)

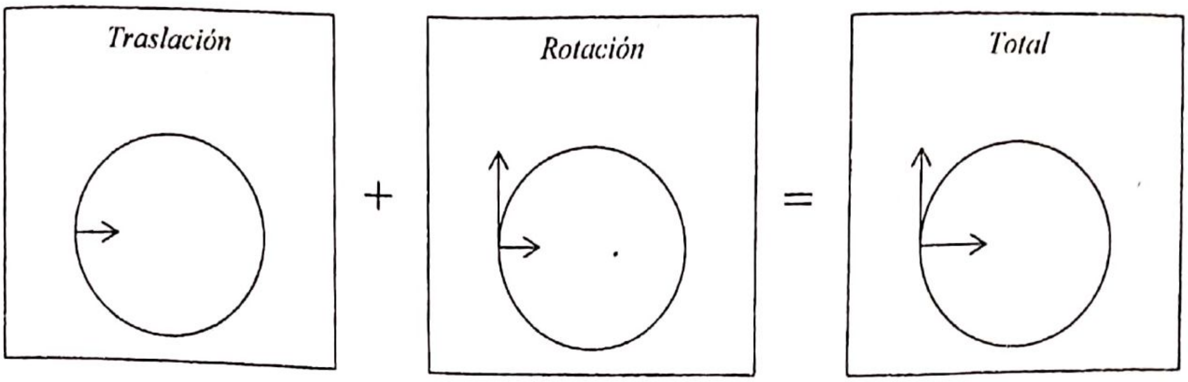
$$m.g = 2.m.a_{CM} + \tfrac{3}{4}.M.a_{CM} \xrightarrow{despejo} a_{CM} = \frac{m.g}{2.m + \frac{3}{4}.M} \xrightarrow{m=0,2\ kg,\ M=1\ kg} a_{CM} \approx 1,7\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

Esta es la respuesta a b). Para contestar a) tenemos que $a_2 = 2.a_{CM} \approx 3,4\ {}^{m}\!/_{s^2}$

Y para c) $\gamma = \dfrac{a_{CM}}{r} \approx 8,5\ {}^{1}\!/_{s^2}$

Y d) sale reemplazando, por ejemplo en $T = \frac{3}{4}.M.a_{CM} \approx 1,28\ N$

Y finalmente (c) es la aceleración en un punto del borde del cilindro en el cual tenemos que la suma de las aceleraciones del CM (en el eje x, hacia delante), y la de rotación (la componente tangencial, hacia arriba porque la velocidad aumenta en módulo, y la componente radial hacia el centro de giro) dan como suma vectorial un vector de dos componentes:



$$\vec{a}_{Total} = \vec{a}_{CM} + \vec{a}_{rot} = 1{,}7\ {}^{m}\!/_{s^2}.\hat{i} + \gamma.r.\hat{j} + \frac{v^2}{r}.\hat{i}$$

La cuenta exacta no puede hacerse porque la aceleración radial es función de la velocidad, la cual a su vez varía con el tiempo, ¿OK?

62.01 FÍSICA I – Curso 02 – Profesor: Dr. Ing. Patricio SORICHETTI – J.T.P.: Ing. J. E. VILLA DEL PRAT

EVALUACIÓN (1ª Oportunidad)

REALIZAR CADA UNO DE LOS PUNTOS EN HOJAS SEPARADAS. ESCRIBIR EN TINTA, NO EN LÁPIZ. DEVOLVER ESTOS ENUNCIADOS JUNTO CON LAS HOJAS DE LA EVALUACIÓN DEBIDAMENTE NUMERADAS. COLOCAR NOMBRE, APELLIDO Y Nº DE PADRÓN EN TODAS LAS HOJAS.-

---

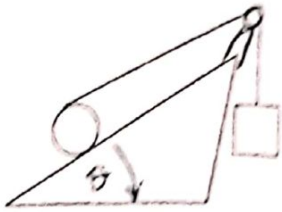
2) **DATOS:** $\theta = 45°$; $m_c = 10$ kg. ; $R = 10$ cm. ; $m_p = 0{,}2$ kg. ; $r = 2$ cm. ; $T = 50$ N .-

Un cilindro sube por un plano cuya inclinación es θ, rodando sin resbalar. La tensión en la cuerda sobre el cilindro es T . Calcular: a) la aceleración del centro de masas a_{cm} del cilindro; b) La fuerza de rozamiento F_R del cilindro sobre el plano inclinado; c) La masa y la aceleración del bloque B; d) Hacer los diagramas de velocidades de traslación, rotación y total (rototraslación) para los puntos del diámetro del cilindro perpendicular al plano inclinado.
NOTA: La cuerda es paralela al plano inclinado.-

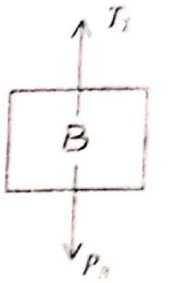
---

4) Dos masas m_1 y m_2 se sueltan desde una altura h como muestra la figura. El rozamiento es despreciable en todos los tramos. Cuando colisionan lo hacen con un coeficiente de restitución e . Se pide: a) Las velocidades de las masas después de la colisión; b) La energía mecánica total cuando se sueltan las masas, un instante antes y un instante después de la colisión. Si hubo variación a qué de debió; c) La cantidad de movimiento del sistema cuando se sueltan las masas, un instante antes y un instante después de la colisión. Si hubo variación a qué se debió.
DATOS: $h = 5$ m. ; $m_1 = 2$ kg. ; $m_2 = 4$ kg. ; $e = 0{,}8$.-

2) Empiezo por plantear las ecuaciones dinámicas para ambos cuerpos y para la polea. Para eso hagamos un diagrama de las fuerzas aplicadas a cada uno. A la derecha está el dibujo del sistema (en el examen se hizo en el pizarrón), con el sistema de ejes con el que voy a trabajar.

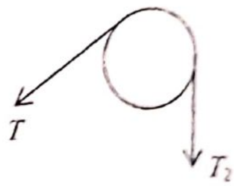


Para la masa B que cuelga, tenemos la tensión y el peso. Uso un eje con sentido positivo hacia abajo, para plantear la ecuación de traslación. El sentido del eje lo elijo "solidario", de manera que sea más sencillo el planteo de las ecuaciones. Para eso lo tomo en el sentido del movimiento del sistema (indicado en el enunciado: el cilindro sube). La ecuación es:



$$P_B - T_2 = m_B.a_B$$

Para la polea, sólo tenemos que plantear la ecuación de rotación, para lo cual observemos que la tensión T_2 la hace rotar en el sentido horario (que elegí como positivo) mientras que T provoca un giro contrario. Nos queda:

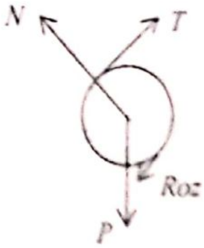


$$\sum M = I.\gamma \rightarrow r.T_2 - r.T = \tfrac{1}{2}.m.r^2.\gamma_{polea}$$

Para esta polea tenemos que su velocidad tangencial al rotar debe ser igual a la velocidad de la soga que la rodea (para que la soga no patine). A su vez esta velocidad debe ser la misma que tiene el cuerpo B en el descenso. Así:

$$\overbrace{v_{tang}}^{v_B} = \omega_{pol}.r \xrightarrow{derivo} a_B = \gamma_{pol}.r$$

Finalmente, para el cilindro que sube por el plano, tenemos la acción del peso, la normal, la tensión de la soga y la fuerza de rozamiento, que ponemos en el sentido que marco en el dibujo, aunque no tenemos certeza que ese sea el sentido correcto (en caso que la despejemos y de negativa, querrá decir que su sentido es el contrario, ¿OK?). Las ecuaciones de traslación del cilindro quedan entonces:



$$x)\ T - F_{roz} - P_x = m_c.a_{cil} \qquad y)\ N - P_y = 0$$

Mientras que la ecuación de rotación, en el sentido "solidario" indicado en el diagrama:

$$\sum M = I.\gamma \xrightarrow{\text{desde el CM}} T.r + F_{roz}.R = \tfrac{1}{2}.M.R^2.\gamma$$

Atención: no hay que confundir "r" (radio de la polea) con "R" (radio del cilindro). Ahora nos toca relacionar las distintas aceleraciones. Para eso observemos que para el cilindro, el punto de contacto con el piso es el CIR, es decir de la condición de "rodar sin deslizar" sale que ese punto tiene velocidad cero, por lo que se debe tener la conocida condición $v_T = \omega.R$

Derivando la relación sale que $a_{cil} = \gamma.R$. Además, la velocidad con que baja la masa B debe coincidir con la del punto tangencial de la polea, y con la del punto superior del cilindro (son todos los puntos vinculados por la soga, que es inextensible). En ese punto superior, la velocidad es la suma de la traslación del CM del cilindro más la tangencial provocada por el movimiento de rotación, es decir:

$$v_{sup} = v_{cm} + \omega.R \xrightarrow{derivando} \overbrace{a_{sup}}^{a_B} = a_{cil} + \gamma.R \xrightarrow{a_{cil}=\gamma.R} a_B = 2.a_{cil}$$

Ponemos las ecuaciones que fuimos encontrando, reemplazando los datos y las relaciones entre aceleraciones que se plantearon:

$$\text{(i)}\ m_B.g - T_2 = m_B.a_B$$

$$r.T_2 - r.T = \tfrac{1}{2}.m_p.r^2.\gamma_{pol} \xrightarrow{\gamma_{pol}=a_B/r} \text{(ii)}\ T_2 - 50\,\text{N} = \tfrac{1}{2}.0{,}2\,kg.\ a_B$$

$$T - F_{roz} - P_x = m.\overbrace{a_{cil}}^{\frac{1}{2}.a_B} \rightarrow \text{(iii)}\ 50\,\text{N} - F_{roz} - 70{,}7\,\text{N} = 5\ kg.a_B$$

$$T.R + F_{roz}.R = \tfrac{1}{2}.M.R^2.\gamma \xrightarrow{\gamma=a_c/R} 50\,\text{N} + F_{roz} = 5\ kg.a_c$$

$$\xrightarrow{a_c=\frac{1}{2}.a_B} \text{(iv)}\ 50\,\text{N} + F_{roz} = 2{,}5\ kg.a_B$$

Sumo miembro a miembro las ecuaciones (iii) y (iv):

$$\text{(iii)}+\text{(iv)}\quad 50\,\text{N} - F_{roz} - 70{,}7\,\text{N} + 50\,\text{N} + F_{roz} = 7{,}5\ kg.a_B \xrightarrow{despejo} a_B = 3{,}91\ m/seg^2$$

Volvemos con este resultado a la (iv):

$$(iv)\ 50\ N + F_{roz} = 2{,}5\ kg.3{,}91\ m/s^2 \xrightarrow{despejo} F_{roz} = -40{,}2\ N$$

El signo nos indica que el sentido es opuesto al que supusimos (es decir que esta fuerza de rozamiento va hacia abajo). Reemplazando en (ii):

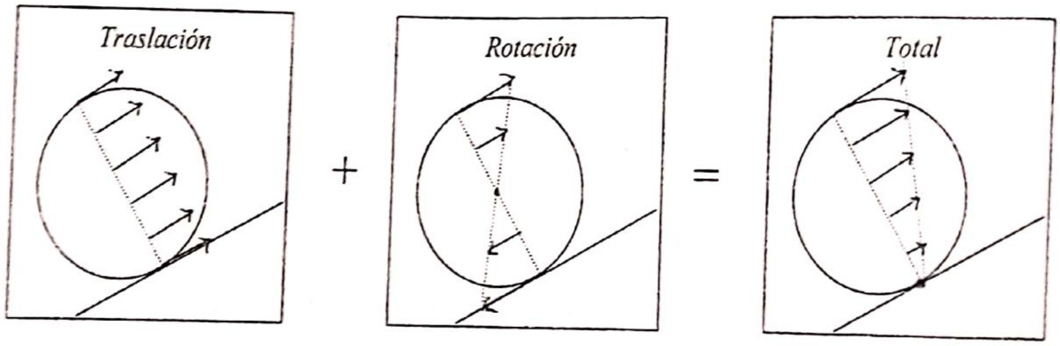
$$(ii) T_2 - 50\ N = \tfrac{1}{2}.0{,}2\,kg.\ 3{,}91\frac{m}{seg^2} \xrightarrow{despejo} T_2 \approx 50{,}4\ N$$

En (i)

$$m_B.g - T_2 = m_B.a_B \rightarrow m_B.\left(9{,}8\ m/seg^2 - 3{,}91\ m/seg^2\right) = 50{,}4\ N \rightarrow m_B \approx 8{,}55\ kg$$

Nos falta contestar el punto (a), ya que la aceleración en función de la cual dejamos todas las ecuaciones es la del cuerpo *B*. De la relación que planteamos: $a_{cil} = \frac{1}{2}.a_B = 1{,}96\frac{m}{s^2}$

Para terminar, el diagrama de velocidades para el diámetro del cilindro en la perpendicular al plano inclinado es el conocido de la práctica de cuerpo rígido:

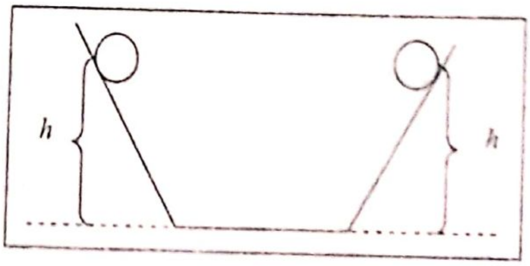


Vemos en el último diagrama que el punto superior (de contacto con la soga) tiene velocidad doble que el CM, y además que el punto de contacto con el plano es el CIR (punto de velocidad nula).

4) a) Primero calculamos las velocidades de ambas masas al llegar a la parte horizontal. Para ambas se puede plantear la conservación de la energía (el rozamiento es despreciable).

$$E_{mec,i} = E_{mec,f} \rightarrow \cancel{m}.g.h = \tfrac{1}{2}.\cancel{m}.v^2$$

$$\xrightarrow{despejo} v = \sqrt{2.g.h} \approx 10\ m/seg$$



Donde al llegar a la parte horizontal se usó que las masas son puntuales, y por lo tanto su energía cinética sólo tiene término de traslación. Como la masa se canceló, esta velocidad es la misma para ambas (por supuesto que difieren en el sentido). Planteo las ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento para el choque en el eje x:

$$\vec{p}_{sist.\,i} = \vec{p}_{sist.\,f} \;\rightarrow\; 4\ kg.(-10\ {}^{m}\!/_{s}) + 2\ kg\ .(+10\ {}^{m}\!/_{s}) = 4\ kg.\vec{v}_{2.f} + 2\ kg\ .\vec{v}_{1.f} \qquad (\triangle)$$

Y el coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{v_{2,f} - v_{1.f}}{v_{2.i} - v_{1.i}} \xrightarrow{datos} 0{,}8 = -\dfrac{v_{2,f} - v_{1,f}}{(-10\ {}^{m}\!/_{s}) - (+10\ {}^{m}\!/_{s})}$

Opero y despejo: $0{,}8 = -\dfrac{v_{2,f} - v_{1,f}}{-20\ {}^{m}\!/_{s}} \rightarrow v_{2.f} - v_{1.f} = 16\ {}^{m}\!/_{s} \rightarrow v_{2.f} = 16\ {}^{m}\!/_{s} - v_{1.f}$

Reemplazo en $(\triangle)$

$$-20\ kg.{}^{m}\!/_{s} = 4\ kg\ .\overbrace{(16\ {}^{m}\!/_{s} + \vec{v}_{1,f})}^{\vec{v}_{2.f}} + 2\ kg\ .\vec{v}_{1.f} \;\rightarrow\; -20\ kg.{}^{m}\!/_{s} = 64\ kg.{}^{m}\!/_{s} + 6\ kg\ .\vec{v}_{1.f}$$

$$\xrightarrow{despejo} \vec{v}_{1,f} = \frac{-64\ kg.{}^{m}\!/_{s} - 20\ kg.{}^{m}\!/_{s}}{6\ kg} = -14\ {}^{m}\!/_{s}$$

Y por lo tanto $v_{2,f} = 16\ {}^{m}\!/_{s} + v_{1,f} = +\ 2\ {}^{m}\!/_{s}$. Los signos de estos resultados nos dicen que la m_1 sale hacia la izquierda, mientras que la m_2 sale hacia la derecha.

b) La energía mecánica antes de la colisión es la suma de las dos cinéticas calculadas con las velocidades iniciales, aunque también puede calcularse como la suma de las dos potenciales gravitatorias cuando salen del reposo: $E_{mec,i} = m_1.g.h + m_2.g.h = 300\ j$

La energía mecánica final es la suma de las cinéticas, calculadas con las velocidades de ambos luego del choque:

$$E_{mec,f} = \tfrac{1}{2}.m_1.(v_{1,f})^2 + \tfrac{1}{2}.m_2.(v_{2,f})^2 = 196\ j + 8\ j = 204\ j$$

Vemos que la energía mecánica del sistema disminuye, lo cual es resultado de la interacción no conservativa (el golpe del choque) entre ambas masas.

c) La cantidad de movimiento del sistema es contante, porque en la colisión el sistema se encuentra aislado. La inicial ya la calculé para el lado izquierdo de $(\triangle)$, y vale $-20\ kg.\frac{m}{seg}$.

La cantidad final debe dar lo mismo, usando las velocidades finales. Comprobalo.

Recuperación Evaluación Parcial – Física I – Turno 11

Apellido y Nombres:
Número de Padrón o Documento de Identidad:

Importante: *Todas las expresiones utilizadas, deben estar debidamente justificadas a partir de las leyes fundamentales correspondientes. Resolver cada problema en hojas separadas. La prolijidad es tomada en cuenta para la evaluación de este examen.*
Las magnitudes en negrita son vectoriales.

Módulo 2: Sistema de partículas. Leyes de conservación. Colisiones.

Problema 3.- a.- Dos objetos de masas m y $3m$ se acercan el uno al otro a lo largo de un mismo eje (por ejemplo el x), con la misma rapidez inicial v_i. El objeto de masa m se mueve hacia la izquierda y el de masa $3m$ lo hace hacia la derecha sobre un piso horizontal sin rozamiento. Los dos objetos sufren una colisión elástica no frontal tal que el objeto de masa m se mueve perpendicularmente a la trayectoria original, después de la colisión. Calcular:
a_1.- las magnitudes de las velocidades finales de ambos objetos, en función de v_i y m;
a_2.- el ángulo con que sale despedido el objeto de masa $3m$.

Módulo 3: Cinemática y Dinámica del cuerpo rígido. Momento de Inercia. Giróscopo.

Problema 4.- a.- Un bloque de masa m (al que se puede considerar puntual) gira con una velocidad lineal v_1 en un círculo de radio r_1 sobre una superficie horizontal sin fricción. Se tira del hilo lentamente desde abajo del plano hasta que el radio del círculo descrito por el bloque se reduce a r_2. Calcular:
a_1.- la tensión T en el hilo en función de la distancia r ($r_2 \leq r \leq r_1$) entre el bloque y el agujero;
a_2.- el trabajo efectuado por T, cuando r cambia de r_1 a r_2, mediante la definición de trabajo mecánico:; $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \times d\vec{r}$

a_3.- La variación de energía cinética que experimenta el bloque; ¿es comparable esta variación con el resultado obtenido en **a_2**?

b_1.- Una persona está parada en el centro de una gran disco circular, que está girando, libremente y sin fricción, a velocidad angular constante alrededor de su eje vertical. En un determinado instante, la persona comienza a caminar hacia el borde. ¿Se conserva el momentum angular del sistema formado por la persona y la mesa para todo t? Explique si la energía de rotación del sistema aumenta, disminuye o no varía, a medida que la persona avanza hacia el borde. Idem para la velocidad angular de la mesa. Justifique todas sus respuestas con ecuaciones y aplicando leyes físicas.

b_2.- Una esfera rueda sin deslizar con rapidez v sobre una superficie horizontal hasta que alcanza el punto más bajo de un plano inclinado ascendente, el cual forma un ángulo α con la horizontal. La esfera comienza a subir por el plano.
En qué caso alcanzará una mayor altura: ¿si el plano ofrece suficiente fricción como para que la esfera siga rodando sin deslizar, o por el contrario, si el plano inclinado es sin rozamiento? Haga un diagrama de la situación y justifique su respuesta mediante ecuaciones y leyes físicas.

Problema 3:

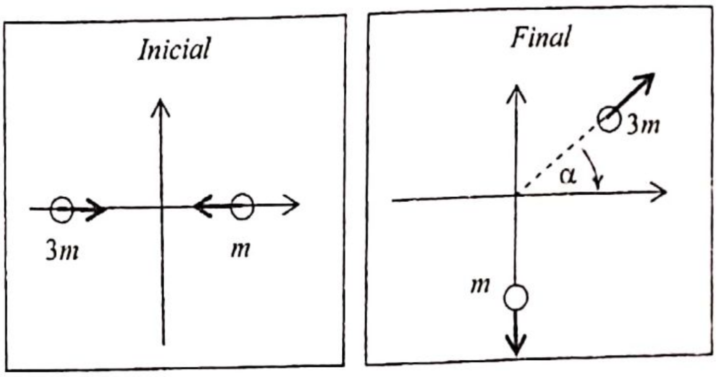
Hacemos un dibujo de la situación y planteamos la conservación de la cantidad de movimiento en los dos ejes (por ser un sistema aislado) y la energía (por ser un choque elástico).

- Conservación de p_{sist} en el eje x:

  $$3.m.v_i - m.v_i = 3.\ m.v_{f,1}\ .\cos(\alpha)$$

- Conservación de p_{sist} en el eje y:

  $$0 = 3.\ m.v_{f,1}\ .\mathrm{sen}(\alpha) - m.v_{f,2}$$



- Conservación de la energía:

$$\tfrac{1}{2}.3.m.{v_i}^2 + \tfrac{1}{2}.m.{v_i}^2 = \tfrac{1}{2}.3.m.(v_{f,1})^2 + \tfrac{1}{2}.m.(v_{f,2})^2$$

Del lado izquierdo se pusieron las cantidades iniciales, del derecho las finales. Por ese motivo figura un cero del lado izquierdo de la cantidad de movimiento inicial en el eje y (las masas se desplazaban sobre el eje x). También por ese motivo, la cantidad de movimiento final de la masa "m" se encuentra nada más que en la ecuación del eje y, con signo negativo, ya que ese es su sentido según nos muestra el dibujo de la situación final. Operando en las tres ecuaciones:

(i) $2.v_i = 3.v_{f,1}.\cos(\alpha)$ (ii) $3.v_{f,1}.sen(\alpha) = v_{f,2}$ (iii) $2.(v_i)^2 = \frac{3}{2}.(v_{f,1})^2 + \frac{1}{2}.(v_{f,2})^2$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de las igualdades (i) e (ii), y luego sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} 4.(v_i)^2 = 9.(v_{f,1})^2.\cos^2(\alpha) \\ (v_{f,2})^2 = 9.(v_{f,1})^2.sen^2(\alpha) \\ \hline 4.(v_i)^2 + (v_{f,2})^2 = 9.(v_{f,1})^2 \end{array} \xrightarrow{despejo} (v_{f,2})^2 = 9.(v_{f,1})^2 - 4.(v_i)^2$$

Reemplazando en (iii):

$$2.(v_i)^2 = \tfrac{3}{2}.(v_{f,1})^2 + \tfrac{9}{2}.(v_{f,1})^2 - 2.(v_i)^2 \xrightarrow{despejo} 4.(v_i)^2 = 6.(v_{f,1})^2 \rightarrow v_{f,1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}.v_i$$

De (iii) $\quad 2.(v_i)^2 = \frac{3}{2}.\frac{2}{3}(v_i)^2 + \frac{1}{2}.(v_{f,2})^2 \;\rightarrow\; v_{f,2} = \sqrt{2}.v_i$

Finalmente, de (i): $\quad 2.v_i = 3.\sqrt{\frac{2}{3}}\,v_i.\cos(\alpha) \;\rightarrow\; \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \;\rightarrow\; \alpha \approx 35.3°$

Problema 4:

a_1) la tensión del hilo podemos sacarla planteando la ecuación del movimiento circular, en la dirección radial. En esa dirección es la única fuerza aplicada (recordar que el problema es horizontal, y que no hay rozamiento):

$$T = m.a_c \;\rightarrow\; T = m.\frac{v^2}{r} \quad (\triangle)$$

Pero en el enunciado hay una pequeña trampa: se pide en función de la distancia "r", lo cual quiere decir que esa debe ser la única variable de la expresión. Y el asunto es que en esta expresión también es variable la velocidad. Por eso conviene que pensemos un poco en la teoría. Si pienso en cantidades que se conservan, entonces es claro que el momento cinético respecto del punto O debe ser constante. En efecto, desde el centro de giro, la Tensión no realiza momento porque está alineado con el vector posición. Y así:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \sum M = 0 \;\rightarrow\; \bar{L} = cte \;\rightarrow\; r.\overbrace{m.v}^{p} = cte$$

Planteando la situación inicial, y en otro punto genérico, se debe cumplir que:

$$r_1.m.v_1 = r.m.v \xrightarrow{despejo} v_{(r)} = \frac{r_1}{r}.v_1$$

Y reemplazando en ($\triangle$) $T = m.\frac{r_1^{\,2}.v_1^{\,2}}{r^3}$. Esta es la expresión pedida.

a_2) Usamos la definición de trabajo, integrando la fuerza Tensión entre los puntos inicial y final. Para hacer la cuenta debemos tener presentes algunas cosas, a saber:

- Como la tensión apunta en el sentido radial, sólo debemos tener en cuenta el desplazamiento radial que hace la masa m, es decir que se cambia ds por dr. Esto se debe a que la otra componente del desplazamiento (la tangencial) es perpendicular a la fuerza, y no aporta al trabajo de la tensión

- El diferencial dr apunta en el sentido positivo o de crecimiento del eje radial, es decir que es saliente al origen "O" (el "agujero"). Esto nos indica que su sentido es opuesto a la tensión, por lo tanto al efectuar el producto escalar $\vec{T}.d\vec{r}$ da un signo menos.

ntonces:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}.d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} m.\frac{r_1^{\,2}.v_1^{\,2}}{r^3}.dr = -m.r_1^{\,2}.v_1^{\,2}\int_{r_1}^{r_2} r^{-3}.dr \xrightarrow{Integro}$$

$$= -m.r_1^{\,2}.v_1^{\,2}.\left[-\tfrac{1}{2}.r^{-2}\right]_{r_1}^{r_2} \xrightarrow{Barrow} = \tfrac{1}{2}.m.\left[\frac{r_1.v_1}{r_2}\right]^2 - \tfrac{1}{2}.m\,v_1^{\,2}$$

Esta es la expresión pedida. Observar que el último término es la energía cinética del punto inicial. El término de adelante es la energía cinética final, aunque a simple vista no lo parece. Pero si recordamos lo que vimos respecto a la constancia del momento cinético, vemos que:

$$L = cte \quad \rightarrow \quad r.m.v_1 = r_2.m.v_2 \quad \rightarrow \quad \frac{r_1.v_1}{r_2} = v_2$$

Así que la cantidad dentro del paréntesis es la velocidad final v_2, y la expresión hallada es:

$$W = \tfrac{1}{2}.m.\left(\frac{r_1.v_1}{r_2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}.m.v_1^{\,2} = \tfrac{1}{2}.m.v_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}.m.v_1^{\,2} = \Delta E_{cin}$$

a_3) La relación entre ambas cosas es clara, deben ser iguales. Esto se debe a que la única fuerza que puede estar haciendo trabajo es la tensión (las otras son dirigidas en la dirección del eje z, por lo tanto son siempre perpendiculares al plano de la mesa donde se produce el movimiento). Y por el teorema de la energía cinética, ese trabajo debe ser igual al cambio de esa energía.

b_1) Cuando la persona empieza a caminar hacia el borde, puede hacerlo gracias a la interacción con el disco sobre el que está parada. Esa fuerza es interna al sistema "hombre+disco", por lo tanto no puede cambiar el "momentum angular" del sistema, y como por lo demás no hay otras fuerzas que hagan momento (no hay fricción y el disco gira libremente) se tiene:

$$\frac{d\vec{L}_{sist}}{dt} = \overbrace{\sum M_{ext}}^{=0} \rightarrow \vec{L}_{sist} = cte$$

Pero esa interacción si puede cambiar la energía de rotación del sistema, ya que la energía puede ser modificada con fuerzas internas (importa si son conservativas, no si son internas). En este caso, al alejarse del centro del disco, estamos aumentando el momento de inercia del sistema respecto del eje de rotación, y de la conservación de L:

$$L = I.\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{L_{inicial}}{I} \quad \xrightarrow{reemplazo} \quad E_{rot} = \frac{1}{2}.I.\omega^2 = \frac{1}{2}.I.\left(\frac{L_o}{I}\right)^2 = \frac{{L_o}^2}{2.I}$$

En esta expresión L_o es constante, y entonces la energía de rotación disminuye cuando aumenta el momento de inercia I del divisor. Y eso es lo que ocurre cuando la persona camina hacia el borde.

Y del mismo despeje sale que $\omega = \dfrac{L_o}{I}$ disminuye al aumentar I, cuando la persona camina hacia el borde.

b_2) Podemos analizar el problema por energía. En ambos casos el problema es conservativo, la energía mecánica de la esfera es constante. En el primero porque si bien hay rozamiento, la condición de rodadura hace que esté aplicado en el punto de contacto, lugar donde la velocidad es nula (el CIR). Y al estar aplicado en el punto sin desplazamiento instantáneo, no realiza trabajo. En el 2do caso ni siquiera hay rozamiento.

A pesar de la semejanza de ambas situaciones, los problemas son muy distintos. En el primero la fuerza de rozamiento ejerce un momento que a medida que sube por el plano inclinado hace que la esfera detenga su traslado y su giro simultáneamente. En efecto, de la condición de rodadura $v_{cm} = \omega.R$, a medida que el centro de masa de la esfera va frenando, al mismo tiempo debe disminuir la velocidad angular "ω", y eso se logra porque justamente el rozamiento pone el torque (momento) de frenado para detener el giro. En el caso sin rozamiento, a medida que sube por el plano inclinado, la esfera no tiene ningún torque aplicado respecto al CM (mirar en el diagrama que sólo tenemos fuerzas aplicadas al CM, o la normal que está alineada al centro). En consecuencia:

$$\frac{d\vec{L}_{esf}}{dt} = \overbrace{\sum M_{ext}}^{=0} \rightarrow L_{esf} = cte \rightarrow \omega = cte$$

Es decir, aún cuando llegue al punto más alto, la esfera conserva la energía de rotación porque "ω" no cambia. En consecuencia, si llamamos E_o a la energía mecánica de la esfera al iniciar el ascenso por ambos planos (es la misma en ambos casos), se tiene que por conservación de la energía al igualar con la del punto más alto:

$$E_o = m.g.h_{1,f} + \overbrace{E_{cin}}^{=0} \qquad\qquad E_o = m.g.h_{2,f} + \overbrace{E_{cin}}^{=\frac{1}{2}.I.\omega^2}$$

El despeje de la primera altura máxima dará mayor que el del caso sin rozamiento, lo cual es lógico porque en el primer caso toda la energía cinética se convierte en potencial, mientras que en el segundo sólo se convierte la de traslación, no puede cambiar la de rotación. Así que llega más alto cuando hay fricción para cumplir la condición de rodadura (¿sorprendido? con rozamiento llega más alto).

Recuperatorio de Evaluación Parcial – Física I – Turno 11

Apellido y Nombres:
Número de Padrón o Documento de Identidad:

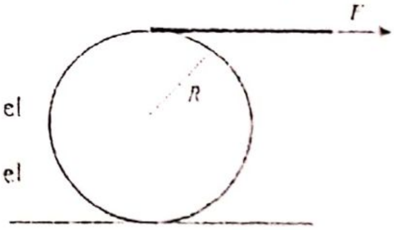
Módulo 2: Sistema de partículas. Leyes de conservación. Colisiones. Cinemática y Dinámica del cuerpo rígido. Momento de Inercia. Giróscopo.

Problema 3.- a.- Una bala de masa $m = 7\ g$ es disparada por un arma de fuego e impacta horizontalmente contra un bloque de madera de masa $M = 1\ kg$ sujeto rígidamente a un banco de carpintero; la bala penetra en el bloque de madera una profundidad $d = 8\ cm$. En una segunda experiencia, otra bala (igual a la primera) de $7\ g$ impacta horizontalmente sobre un bloque de madera idéntico al anterior pero ubicado sobre una superficie plana sin rozamiento. La fuerza de rozamiento (constante) que detiene a la bala dentro del bloque de madera, es la misma en ambos casos. Calcule, para el segundo caso

a_1.- el porcentaje de la energía inicial de la bala que se disipó en el frenado;
a_2.- la profundidad que penetró la bala en el bloque.

b.- Jugando con un amigo, éste te arroja una pelota de tenis con una cierta velocidad y conseguís atraparla (a la misma altura del suelo de la que partió de la mano de tu amigo). Luego tu amigo toma una bola de billar (de masa mucho mayor que la de la pelota de tenis) y te da tres opciones para arrojarla y que la atrapes:
i) arrojarla con la misma velocidad que tenía la pelota de tenis;
ii) arrojarla con la misma cantidad de movimiento (o momentum) de la pelota de tenis;
iii) arrojarla con la misma energía cinética de la pelota de tenis.
¿Cuál de las opciones elegirías para poder recibirla más fácilmente? Justificá tu respuesta.
No perderse en razonamientos extraños: la bola de billar llegará en todos los casos hasta la posición de tu amigo; tu amigo siempre la tomará a la misma altura de la que partió de tu mano, etc.

Problema 4.- a.- Un alambre arrollado sobre un carrete de masa M y radio R, se desenrolla mediante una fuerza horizontal constante F. El carrete es un cilindro sólido, uniforme, que rueda sin deslizar.



a_1.- Realizar el diagrama de cuerpo libre para el cilindro.
Calcular:
a_2.- la velocidad del centro de masa del carrete, cuando el mismo recorrió una distancia d;
a_3. la energía del carrete cuando recorrió la distancia d, y el trabajo de la fuerza de rozamiento.
Momento de inercia del cilindro macizo: $I=mR^2/2$.

b.- Dos masas m_1 y m_2 están unidas por una barra de masa despreciable y longitud L. Inicialmente el sistema se halla en equilibrio inestable en posición vertical, con m_2 apoyada, en el punto P, sobre una superficie horizontal libre de rozamiento. Una levísima perturbación aparta al sistema del equilibrio, y lo hace caer de tal manera que al final la barra queda en posición horizontal

b₁.- Dibuje, en forma cualitativa, la trayectoria de m_1 y m_2 desde la posición inicial a la final.
b₂.- Halle la componente horizontal de la velocidad del centro de masa entre el instante inicial y el instante en que la masa m_1 toca el piso. Justifique.
b₃.- Halle la posición del centro de masa en el estado inicial, y la distancia de cada masa al punto P, en el instante en que la barra queda horizontal

Problema 3.a):

Para la primera colisión no vale plantear la conservación de p_{sist}, ya que al estar el bloque M rígidamente unido al banco, el sistema tiene una fuerza externa (la del banco) no despreciable (sus efectos son obvios). En esa colisión toda la energía del sistema se pierde como una fricción entre el bloque y la masa, por lo que podemos poner:

$$E_f - E_o = W^{roz} \rightarrow 0 - \tfrac{1}{2}.m_{bala}.v_o^2 = F_{roz}.0{,}08\,m.\cos(180) \rightarrow F_{Roz} = \frac{m_{bala}.v_o^2}{0{,}16\ m} \quad (*)$$

En el 2do caso, el sistema está aislado en la colisión, por lo tanto vale la constancia de la cantidad de movimiento para un instante antes y otro después. Tener en cuenta que esta vez la bala sigue solidaria junto al bloque, y así:

$$m.v_o = (M+m).v_f \xrightarrow{despejo} \boxed{v_f = \frac{m}{(M+m)}.v_o}$$

La pérdida de energía para el sistema esta vez es la resta de las energías cinéticas:

$$E_f - E_o = W^{roz} \rightarrow \tfrac{1}{2}.(M+m_b).v_f^2 - \tfrac{1}{2}.m_b.v_o^2 = F_{roz}.D.\cos(180)$$

$$\xrightarrow{reemplazo\ v_f} \tfrac{1}{2}.(M+m_b).\frac{m_b^2}{(M+m_b)^2}.v_o^2 - \tfrac{1}{2}.m_b.v_o^2 = -F_{roz}.D$$

El punto a₁ lo podemos contestar haciendo el cociente entre la energía final, y la inicial de la bala. Divido:

$$\frac{E_f}{E_o} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}.\frac{m_b^2}{(M+m_b)}.\cancel{v_o^2}}{\cancel{\tfrac{1}{2}}.m_b.\cancel{v_o^2}} = \frac{m_b}{(M+m_b)} \xrightarrow{datos} = \frac{0{,}007}{1{,}007} \approx 6{,}95\ .\ 10^{-3} \xrightarrow{x100} 0{,}7\ \%$$

Es decir, al sistema le queda una energía final del orden del 0,7 % respecto de la inicial. Lo que falta es lo que perdió. Contesto que se pierde un 99,3% de la Energía mecánica.

a₂) suponiendo que las dos veces actuó la misma fuerza de rozamiento, se tiene:

$$\frac{1}{2}.\frac{{m_b}^2}{(M+m_b)}.{v_o}^2-\frac{1}{2}.m_b.{v_o}^2=-F_{roz}.D \xrightarrow{\textit{reemplazo } F_{roz} \textit{ de } (*)}$$

$$\frac{1}{2}.\frac{{m_b}^2}{(M+m_b)}.{v_o}^2-\frac{1}{2}.m_b.{v_o}^2=-\frac{m_b.{v_o}^2}{0{,}16}.D \xrightarrow{\textit{despejo}} D=-0{,}16.\left(\frac{m_b}{2.(M+m_b)}-\frac{1}{2}\right)$$

En realidad el factor "-0,16" tiene unidad metros, no la puse para no confundir con la masa de la bala. Con los datos de las masas sale que $D = 0{,}079\ m$ (casi los mismos 8 cm de antes)

b) para detener la pelota debemos ejercerle un impulso en el momento de atraparla. Como ese impulso es igual a la variación $\Delta p_{pel} = 0 - m.v$ (en el impacto, el final es cero). Es claro que si a la bola de billar le damos la misma velocidad, al aumentar la masa con la misma velocidad, habrá que frenarla con un impulso mucho mayor. Y eso no nos conviene.

Si en cambio lo hacemos con la misma energía, se tendrá:

$$\frac{1}{2}.m_o.{v_o}^2=\frac{1}{2}.m_f.{v_f}^2 \rightarrow \frac{v_o}{v_f}=\sqrt{\frac{m_f}{m_o}}$$

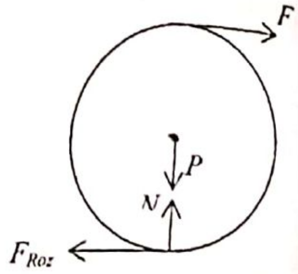
Veamos qué pasa con la cantidad de movimiento en este caso:

$$\frac{p_{tenis}}{p_{billar}}=\frac{m_o.v_o}{m_f.v_f} \xrightarrow{\textit{reemplazo}} \frac{m_o}{m_f}.\sqrt{\frac{m_f}{m_o}}=\sqrt{\frac{m_o}{m_f}}<1 \rightarrow p_{tenis}<p_{billar}$$

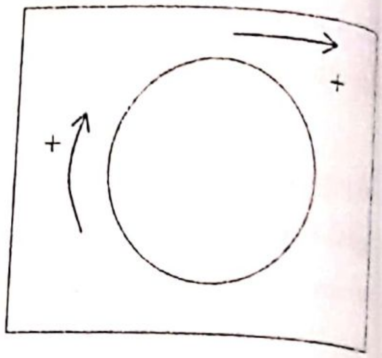
Es decir, la bola de billar la estamos lanzando con mayor cantidad de movimiento, será mayor el impulso necesario. La 3ª opción nos da la posibilidad de hacer el mismo impulso con la bola de billar que con la pelota. Por lo menos en esa opción no perdemos. Así que la elijo como la más conveniente de las tres propuestas.

Problema 4 a):

a_1) El diagrama de cuerpo libre incluye cuatro fuerzas: el peso aplicado en el CM, la Normal y el rozamiento en el punto de contacto y la F tangente en el punto superior. Respecto del sentido del Rozamiento, se debe tener en cuenta que esa fuerza debe tener el sentido mostrado, para que el momento aplicado al carrete tenga sentido horario, a fin de que rote como se muestra en la figura, acompañando el moviendo hacia delante.



a_2) Escribamos las ecuaciones dinámicas para el carrete, usando para eso un sistema solidario de ejes, los cuales consisten en un eje x hacia la derecha positivo, y el sentido horario como positivo para la rotación del carrete, de manera tal que cuando el carrete avanza hacia la derecha, por la condición de rodadura gira a la vez en sentido horario (ambas cosas serían positivas).



Con este sistema las ecuaciones de traslación quedan $\begin{cases} x)\ F - F_{Roz} = M.a_{CM} \\ y)\ N - P = 0 \end{cases}$

En tanto, la de rotación escrita desde el CM: $+F.R + F_{Roz}.R = I_{CM}\cdot\gamma$

Observar que ambas fuerzas ejercen momentos de rotación de sentido horario.

Uso la condición de rodadura $a_{CM} = \gamma.R$, y la expresión del momento de inercia $I_{CM} = \frac{1}{2}.M.R^2$

$$F.R + F_{Roz}.R = \tfrac{1}{2}.M.R^2.\left(\frac{a_{CM}}{R}\right) \xrightarrow{simplifico} (F + F_{Roz}).\cancel{R} = \tfrac{1}{2}.M.\cancel{R}.\ a_{CM}$$

Ahora usamos la ecuación del eje x, sumando miembro a miembro con esta última:

$$\begin{array}{rl} & F - F_{Roz} = M.a_{CM} \\ + & F + F_{Roz} = \tfrac{1}{2}.M.a_{CM} \\ \hline & 2.F = \tfrac{3}{2}.M.a_{CM} \quad \rightarrow \quad a_{CM} = \dfrac{4.F}{3.M} \end{array}$$

Esta aceleración es constante, por lo tanto el CM realiza un MRUV. Para calcular la velocidad final podemos usar la ecuación complementaria de este movimiento:

$$(v_f)^2 - (v_o)^2 = 2.a.\Delta x \xrightarrow{datos} (v_f)^2 - 0 = 2.\tfrac{4}{3}.\tfrac{F}{M}.d \xrightarrow{despejo} v_f = \sqrt{\tfrac{8}{3}\tfrac{F.d}{M}}$$

Esta es la velocidad pedida. Aunque hay otra posibilidad de calcularla, como mostramos en la parte que continúa (ver "la observación").

a_3) El trabajo del rozamiento es nulo, ya que esa fuerza está aplicada al punto "Centro instantáneo de rotación" o "CIR", es decir el punto que no se desplaza. Sin embargo el cuerpo cambia su energía mecánica debido a la acción de la fuerza F (no conservativa). Como el problema es horizontal, sólo debemos mirar la cinética. Y tenemos un cambio en dicha energía, ya que empieza valiendo 0 (parte del reposo) y termina siendo la suma de la cinética de traslación más la de rotación:

$$E_f = \tfrac{1}{2}.M(v_f)^2 + \tfrac{1}{2}.I(\omega_f)^2 \xrightarrow{rodar:\ v=\omega.R} = \tfrac{1}{2}.M(v_f)^2 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.M.R^2\ (\tfrac{v_f}{R})^2$$

$$\xrightarrow{opero} = \tfrac{1}{2}.M.v_f^{\ 2} + \tfrac{1}{4}.M.\ v_f^{\ 2} = \tfrac{3}{4}.M.\ v_f^{\ 2}$$

Usando la expresión hallada en la parte a_2) para la velocidad final del CM, se tiene:

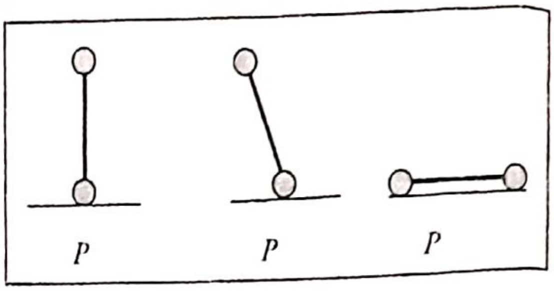
$$E_f = \tfrac{3}{4}.M.\ \tfrac{8}{3}.\frac{F.d}{M} = 2.F.d$$

Este resultado podría haberse encontrado de manera más sencilla, si se plantea el problema por energía. En efecto, la única fuerza que ejerce trabajo es la F, la cual es tangente al desplazamiento en el punto de aplicación. Su trabajo es el de una fuerza constante, con ángulo de 0°, y el desplazamiento del punto donde se aplica es el doble del "d" del CM (recordar el concepto de "campo de velocidades" del cuerpo rígido, con velocidad nula en el punto de rodadura, y doble en el punto opuesto). Es decir, el trabajo de F vale "$F.2.d$". De allí sacamos:

$$W^F = E_f - E_o \ \rightarrow\ E_f = F.2.d$$

Y como vimos que $E_f = \tfrac{3}{4}.M.\ v_f^{\ 2}$ (esto salía de sumar la de traslación y la de rotación), de igualar con el trabajo se podía despejar la v_f sin necesidad de plantear la dinámica.

b) Cualitativamente tenemos la siguiente situación: cuando m_1 empieza a descender moviéndose para un costado, la m_2 se desplaza por el piso hacia el sentido contrario (ver la secuencia del dibujo).



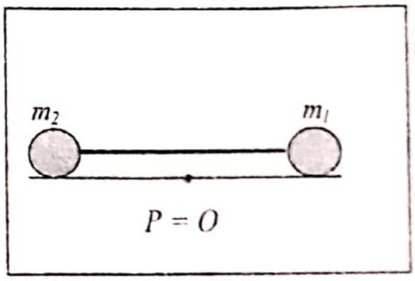
Esto se debe a lo siguiente: en la caída las fuerzas externas que actúan sobre el sistema "masas y barra" son el Peso (aplicado al CM), y la Normal (aplicado en m_2 que está siempre sobre el piso).
De esto sale algo muy importante: nunca tenemos fuerzas en el sentido del eje x, por lo tanto, de la ecuación $F = \frac{dP_{CM}}{dt}$, si no hay fuerza horizontales, entonces el vector P_{CM} en ese eje tiene componente constante. En particular, como en el inicio la velocidad era cero, entonces si esa componente $P = M.v$ es constante, el centro de masa no puede moverse en ese eje:

$$x)\ \frac{dP}{dt} = F_x = 0 \ \rightarrow\ P_x = cte \ \rightarrow\ M.v_{x,cm} = M.\overbrace{v_{x,o}}^{=0} \ \rightarrow\ v_{x,cm} = 0$$

Es decir, el CM no se mueve en el eje x en ningún momento de la caída, razón por la cual si una masa se desplaza para la derecha, la otra lo hace para la izquierda. Esto contesta b_2), esa componente siempre es nula. La componente vertical, en cambio, es evidente que <u>si</u> cambia, porque el CM en el movimiento baja hasta quedar en el piso. Eso indica que las fuerzas verticales (Peso y Normal) <u>no</u> se compensan. Pero sobre eso no nos piden ningún análisis.

b_3) Para calcular la distancia a la que queda cada masa respecto del punto P (que por lo que dijimos es la ubicación en el eje x del CM durante todo el problema) debemos hacer alguna cuenta. Es importante notar que no es cierto que ambas queden a la misma distancia, salvo que las masa sean iguales.

Llamemos para el planteo "d_1" a la posición final de la masa m_1, y "d_2" a la de la masa m_2, midiendo desde el punto P (es el origen e insisto una vez más que también es la posición del CM en toda la caída). De la fórmula para la ubicación del CM



$$\overbrace{x_{cm}}^{=0} = \frac{m_1.\overbrace{d_1}^{x_1} + m_2.\overbrace{(-d_2)}^{x_2}}{m_1 + m_2} \xrightarrow{despejo} d_2 = \frac{m_1.d_1}{m_2}$$

Una observación sobre el signo de "$-d_2$": en estas fórmulas van las posiciones "x_i" de ambas masas, que coinciden con sus distancias al origen P, salvo para el caso de m_2 que es negativa (la posición es "menos la distancia", porque está a la izquierda del cero, ¿OK?). Además, sumando ambas distancias al origen dan el largo total "L" de la barra:

$$d_1 + d_2 = L \xrightarrow{d_2 = \frac{m_1 . d_1}{m_2}} d_1 + \frac{m_1}{m_2}.d_1 = L \xrightarrow{despejo}$$

$$d_1 = \frac{L}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)} = \frac{m_2.L}{(1+m_1)} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{m_1}{m_2}.d_1 = \frac{m_1.L}{(m_2+m_1)}$$

Observar que estas expresiones dan las cosas más esperables:

1) si las masas son iguales $m_1 = m_2$ reemplazando sale que $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}.L$. Es decir que las dos quedan a la misma distancia (la mitad del largo de la barra) del punto P, donde está el CM.

2) Si una masa es mucho mayor que la otra, por ejemplo si $m_2 >> m_1$, entonces se puede poner aproximadamente:

$$m_2 + m_1 \approx m_2 \quad \text{y} \quad \frac{m_1}{m_2} \approx 0 \xrightarrow{reemplazando} d_1 \approx L \quad \text{y} \quad d_2 \approx 0$$

Es decir, la masa enorme m_2 casi no se mueve de P, la masa pequeñita m_1 cae "L" (el largo de la barra) del punto P. Analizar las expresiones obtenidas para algunos en los cuales se sabe evidentemente lo que pasa es una forma de controlar que las expresiones halladas son correctas.

RECUPERATORIO DE LA 2da PARTE DEL PRIMER PARCIAL – FISICA 1 – TURNO 04 **TEMA 2**

Apellido y Nombres: ....

Padrón: ....

Módulo 2: Sistema de partículas. Leyes de conservación. Colisiones

Problema 1:

Una barra rígida de masa despreciable y longitud **L** une dos masas iguales ***m***, y se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal como muestra la figura. Una tercera masa del doble de valor que las anteriores, se desplaza en línea recta y perpendicular a la barra con velocidad ***v***, y choca con una de las masas de los extremos, quedando adherida a ella. Calcular

a) la velocidad del centro de masa luego de la colisión. Describa su movimiento posterior.

b) la velocidad angular de rotación alrededor del centro de masa ("spin"), luego de la colisión.

c) la energía mecánica del sistema de la tres partículas antes y después de la colisión. Si hay diferencia explique a qué se debió.

Datos: $L = 10$ cm , $v = 0.2$ m/seg , $m = 10$ gr

Problema 2:

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa. Si es verdadera justifique, si es falsa de un contraejemplo:

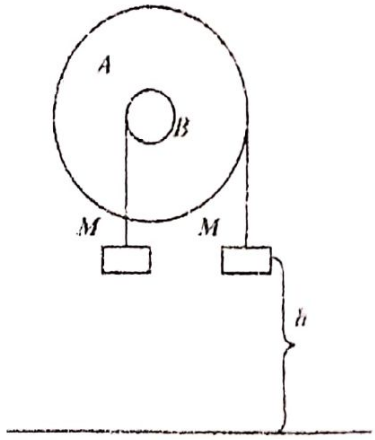
a) un sistema de partículas conserva su momento angular si la suma de las fuerzas exteriores es nula.
b) en un sistema de partículas el CM puede tener velocidad constante pero las partículas tener alguna aceleración
c) en un sistema de partículas que se encuentre aislado, su energía mecánica debe permanecer constante.

Módulo 3. Cinemática y dinámica de un cuerpo rígido

Problema 3:

Dos cilindros A y B están firmemente unidos, y pueden girar alrededor de un eje horizontal para el cual la fricción es despreciable. Cada uno de ellos tiene una soga enrollada de la cual cuelgan sendas masas ***M***. El sistema es liberado desde el reposo, con ambas masas a una altura ***h***. Calcular

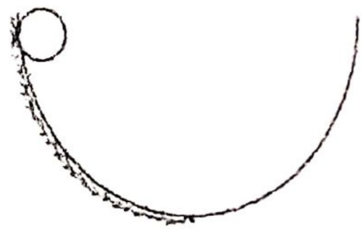
a) la aceleración lineal de cada masa.
b) la aceleración angular de los cilindros.
c) la velocidad con que llega al piso la masa que desciende. ¿Se conserva la energía del sistema de masas y cilindros? Justifique



Datos: $M = 1\ kg$, $h = 0.8\ m$, $R_A = 2.R_B = 16\ cm$
$M_A = 10\ kg$, $M_B = 5\ kg$

Problema 4:

Una esfera de radio ***R*** se suelta de la posición ***A***, iniciando el descenso dentro de un tubo de radio $r = 4.R$. La mitad izquierda del tubo presenta rozamiento, de manera que en el descenso se satisface la rodadura sin deslizamiento. En la mitad derecha el rozamiento puede despreciarse.



4.1) ¿se conserva la energía mecánica de la esfera en alguno de los dos tramos?
4.2) indique si la altura máxima que alcanza del lado derecho es menor, mayor, o igual que h_A.

Justifique las respuestas con conceptos y ecuaciones.

Problema 1:

Analicemos lo que ocurre en este problema. Es claro que tenemos una interacción entre las tres partículas, ya que la barra rígida "sin masa" lo que hace es transmitir las fuerzas entre ellas. Como no existen otras fuerzas en el problema (normales equilibran a los pesos ya que es una mesa horizontal, y no existen rozamientos), podemos decir que el sistema de las tres masas se encuentra aislado en todo momento, y vale igualar cantidad de movimiento e impulso angular para antes y después de la colisión. Pero no podemos decir lo mismo en el tema de la energía.

Aunque haya fuerzas internas, la energía mecánica puede disminuir (típica situación de los choques). Con estos conceptos en claro, veamos como se usan para contestar cada punto.

a) la velocidad del CM es una cantidad constante, ya que:

$$\frac{d\bar{P}_{sist}}{dt} = \sum F_{ext} \xrightarrow{reemplazo} \frac{d(m_T . v_{cm})}{dt} = 0 \rightarrow v_{cm} = cte$$

Podemos entonces calcular la velocidad inicial (es decir antes de la captura). La sacamos con la expresión que vimos en la guía de "sistema de partículas":

$$\bar{v}_{cm} = \frac{m_1.\bar{v}_1 + m_2.\bar{v}_2 + m_3.\bar{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 + 0 + 20\ g\ .\ 0{,}2\ {}^{m}\!/_{seg}\ .\ \hat{i}}{10\ g + 10\ g + 20\ g} = 0{,}1\ {}^{m}\!/_{seg}\ .\ \hat{i}$$

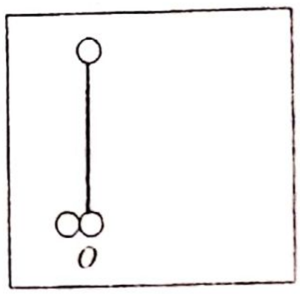
Como el sistema está aislado, el CM ejecuta un MRU, ya que como mostramos antes, su velocidad debe permanecer constante.

b) lo mismo que para el punto anterior, podemos calcular el momento angular inicial respecto del CM, porque es una cantidad constante (no hay momentos externos). Pero primero ubiquemos el CM del sistema. Para hacer la cuenta vamos a considerar el momento de la colisión (se puede hacer en cualquier otro momento, la única diferencia estará dada por la ubicación sobre el eje x, pero eso no modifica los impulsos angulares).

Uso la expresión:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2 + m_3.\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \xrightarrow{reemplazo}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{10\ g\ .10\ cm\ .\ \hat{j} + 0 + 0}{10\ g + 10\ g + 20\ g} = 2{,}5\ cm\ .\ \hat{j}$$



Entonces, antes de la captura, el impulso angular respecto del CM vale:

$$L_{sist.} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 \xrightarrow{\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0}$$

$$= \; 0 \; + \; 0 \; + (-0{,}025\, m.\hat{j}) \times (20\, g.0{,}2\ {}^{m}\!/_{s}\ .\hat{i}) = 0{,}1\ \frac{gr.m^2}{seg}\ .\hat{k}$$

Observar que la posición de las dos masas inferiores es (-2,5 cm). $\hat{j}$, ya que estamos midiendo su posición respecto del CM calculado antes (ese es el origen). Calculamos la velocidad angular de la expresión para el centro de masa: $L = I.\omega$

Para eso tenemos que los momentos de inercia de las tres partículas, medidos desde el CM que se calculó, valen:

$$I = \sum m.d^2 = 10\ g.(0{,}1\, m - 0{,}025\ m)^2 + 10\ g.(0 - 0{,}025\ m)^2 + 20\ g.(0 - 0{,}025\ m)^2 = 0{,}06375\ gr.m^2$$

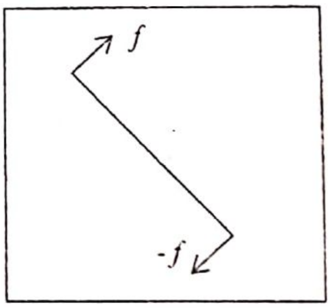
Entonces

$$L = I.\omega \;\rightarrow\; 0{,}1\ \frac{gr.m^2}{seg}\ .\hat{k} = 0{,}06375\ gr.m^2.\omega \xrightarrow{despejo} \omega = 1{,}57\ \frac{1}{seg}\ \hat{k}$$

Problema 2:

a) esta es falsa; en efecto, podemos tener dos partículas recibiendo un par de fuerzas opuestas pero que hagan momento.

Un ejemplo podría ser el siguiente sistema: dos masas unidas por una barra, en los extremos se aplican fuerzas como muestro, el resultado es un cambio de L porque ambas fuerzas aplican momentos que se suman respecto del CM, pero la resultante de esas dos fuerzas es nula (por eso el CM puede permanecer en reposo)

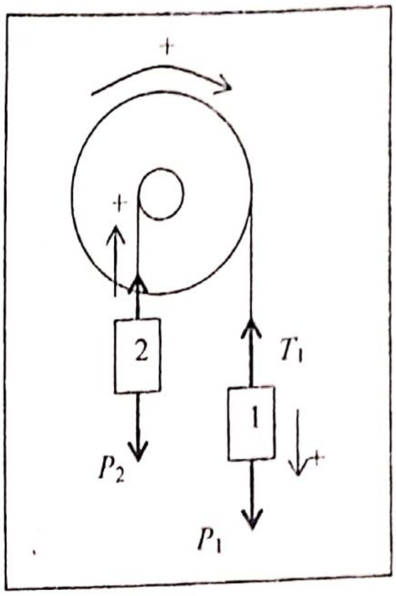


b) esta es verdadera, sirve el ejemplo que pusimos antes, donde la resultante es nula (y por lo tanto el CM no tiene aceleración), sin embargo cada partícula si tiene aceleración (de rotación, más la tangencial que incrementa la cantidad de movimiento p de cada una). Otro caso son los choques, el CM de un sistema aislado se mueve a velocidad constante, pero cada uno de los cuerpos que colisiona modifican violentamente su velocidad.

c) esta es falsa, un sistema aislado puede modificar su energía mecánica si las fuerzas de interacción son no conservativas. Tenemos por ejemplo una explosión, donde las partículas y el sistema aumentan su energía pesar que el cuerpo original se encuentre aislado. Lo mismo pero al revés ocurre en los choques, la energía disminuye a pesar de que durante el choque vale la aproximación de ser un sistema aislado.

Problema 3:

Escribamos las ecuaciones del sistema de cuerpos vinculados, usando el sistema solidario de la figura (tomando una orientación posible del movimiento, en este caso en el sentido que indicamos las flechas). Con este sistema de referencia, el sistema tiene las siguientes ecuaciones:



$$m_1: \quad P_1 - T_1 = m_1.a_1$$

$$m_2: \quad T_2 - P_2 = m_2.a_2$$

Para la polea, en cambio, sólo necesito la ecuación de rotación. Como el sistema de referencia tiene sentido horario, el momento de T_1 es positivo (ya que esa fuerza aplicada al disco externo, la hace rotar en el sentido de las agujas del reloj), en cambio el de T_2 es contrario. En cuanto al momento de inercia, hay que tener en cuenta que para tener el total debemos sumar el de ambos discos. Nos queda:

$$T_1.R_A - T_2.R_B = (\tfrac{1}{2}.M_A.R_A{}^2 + \tfrac{1}{2}.M_B.R_B{}^2).\gamma$$

Nos falta plantear las condiciones de vínculo entre las aceleraciones de las masas y la polea. Vimos que el movimiento debe ser tal que el punto de contacto de la soga con la polea debe tener la velocidad tangencial de la polea en ese punto. Así, para el caso de la soga "1", la velocidad de movimiento de la soga (que también es la del cuerpo "1" que cuelga de ella), debe coincidir con la velocidad tangencial en el punto externo: $v_1 = \omega.R_A$. De la misma forma sale que para el punto de contacto de la soga "2" se debe tener $v_2 = \omega.R_B$.

Derivando respecto al tiempo estas dos expresiones sale la relación entre las aceleraciones de ambas masas, con la aceleración angular "γ" de la polea: $a_1 = \gamma.R_A$ $\quad a_2 = \gamma.R_B$

Ya estamos listos para empezar los despejes. Reemplazo estas relaciones en las ecuaciones dinámicas que ya planteamos:

$$\text{i)} \quad P_1 - T_1 = m_1.R_A.\gamma$$

$$\text{ii)} \quad T_2 - P_2 = m_2.R_B.\gamma$$

$$\text{iii)} \quad T_1.R_A - T_2.R_B = \left(\tfrac{1}{2}.M_A.R_A^{\,2} + \tfrac{1}{2}.M_B.R_B^{\,2}\right)\gamma$$

De i) $T_1 = P_1 - m_1.R_A.\gamma$ y de ii) $T_2 = P_2 + m_2.R_B.\gamma$. En iii):

$$(P_1 - m_1.R_A.\gamma).R_A - (P_2 + m_2.R_B.\gamma).R_B = \left(\tfrac{1}{2}.M_A.R_A^{\,2} + \tfrac{1}{2}.M_B.R_B^{\,2}\right)\gamma$$

$$\xrightarrow{despejo} \quad \gamma = \frac{P_1.R_A - P_2.R_B}{\frac{1}{2}.M_A.R_A^{\,2} + \frac{1}{2}.M_B.R_B^{\,2} + m_1.R_A^{\,2} + m_2.R_B^{\,2}}$$

Reemplazando los datos (se usó $g = 10\,{}^{m}\!/_{s^2}$ para sacar los pesos) obtengo $\gamma = 4{,}54\ {}^{1}\!/_{seg^2}$

b) Las aceleraciones de los cuerpos que cuelgan las sacamos de las condiciones de vínculo

$$a_1 = \gamma.R_A = 0{,}73\ {}^{m}\!/_{seg^2} \quad y \quad a_2 = \gamma.R_B = 0{,}36\ {}^{m}\!/_{seg^2}$$

c) el cuerpo que viaja al piso es el "1", ya que es el que tiene la aceleración hacia abajo. Recordar que en el sistema elegido para cada cuerpo (ver el dibujo en la página anterior), el positivo del "2" significa hacia arriba, el del "1" es hacia abajo. Como tiene una aceleración constante, debemos usar las ecuaciones del MRUV, y con ellas hallar qué velocidad alcanza al bajar los 0,8 m hasta el piso. Uso la complementaria:

$$v^2 - {v_o}^2 = 2.a_1.\Delta x \xrightarrow{v_o=0} v = \sqrt{2.a_1.\Delta x} \approx 1{,}08\ {}^{m}/_{seg}$$

La energía mecánica de todo el sistema debe conservarse, ya que las fuerzas no conservativas que hacen trabajo (las tensiones de ambas) transfieren energía de las masas a los cilindros. Es fácil de verificar, ya que:

- La variación de potencial está dada por los 0,8 m que baja m_1, y por lo que sube m_2. Esta cantidad no la tenemos, pero la podemos sacar de integrar la relación:

$$\omega_A = \omega_B \rightarrow \frac{v_1}{R_A} = \frac{v_2}{R_B} \xrightarrow{Integro} \frac{1}{R_A}\overbrace{\int v_1\ dt}^{\Delta x_1} = \frac{1}{R_B}\overbrace{\int v_2\ dt}^{\Delta x_2}$$

$$\xrightarrow{despejo} \Delta x_2 = \frac{R_B}{R_A}.\Delta x_1 = 0{,}4\ m$$

Es decir, para cuando el cilindro mayor liberó los 0,8 m (lo que baja m_1), el de menor radio enrolló la mitad, y esto es lo que sube m_2. Así $\Delta E_{pot} = M_1.g.(-0{,}8m) + M_2.g.(0{,}4m) = -4\ j$

En tanto, la energía cinética aumenta para los dos cuerpos y para los cilindros. Teniendo la velocidad final del m_1, las otras velocidades las sacamos de las condiciones de vínculo planteadas anteriormente:

$$\omega_f = \frac{v_{1,f}}{R_A} \approx 6{,}74\ {}^{1}/_{seg} \quad \text{y} \quad \frac{v_1}{R_A} = \frac{v_2}{R_B} \xrightarrow{despejo} v_{2,f} \approx 0{,}54\ \frac{m}{seg}$$

Entonces, la variación de la energía cinética (directamente es la final porque el sistema parte del reposo), vale:

$$\Delta E_{cin} = E_{cin,f} = \frac{1}{2}.\overbrace{\frac{1}{2}M_A.{R_A}^2}^{I_A}.\omega^2 + \frac{1}{2}.\overbrace{\frac{1}{2}M_B.{R_B}^2}^{I_B}.\omega^2 + \frac{1}{2}.m_1.(v_{1,f})^2 + \frac{1}{2}.m_2.(v_{2,f})^2 \approx 4\ j$$

Problema 4:

Analicemos lo que pasa en el descenso de la mitad izquierda, *donde hay rozamiento y se satisface la condición de rodadura*. Allí la fuerza de *rozamiento está aplicada en el CIR, por lo tanto no realiza trabajo*. Como no hay trabajo de fuerzas no conservativas, la esfera *conserva su energía mecánica*. Otro tanto ocurre del lado derecho, donde directamente *no hay rozamiento y por lo tanto la energía es constante*. Es decir, tanto del lado izquierdo como del lado derecho la esfera conserva su energía mecánica, transformando gravitatoria en cinética, y luego al revés (*primera respuesta entonces es que se conserva en ambos tramos*).

Pero esto no quiere decir que el cuerpo llegue a la misma altura de la partida. En efecto, cuando sube del lado derecho, al no haber rozamiento, no hay momentos aplicados y por lo tanto no puede cambiar la velocidad angular:

$$\frac{dL}{dt} = \overbrace{\sum M}^{=0} \rightarrow L = cte \rightarrow \omega = cte$$

Dicho de otra forma, al no haber más rozamiento es imposible que se cumpla la condición de rodadura, y la esfera sube disminuyendo su velocidad pero con velocidad de rotación "ω" constante. Como la energía mecánica se conserva vale igualar:

$$E_{mec,f} = E_{mec,i} \rightarrow Mg.h_f + \frac{1}{2}.I.\omega^2 = Mg.h_o \rightarrow M.g.(h_o - h_f) = \overbrace{\frac{1}{2}.I.\omega^2}^{+}$$

Al igualar se usó que en las dos posiciones extremas la velocidad de traslación es nula. De esta última igualdad vemos que el paréntesis debe ser positivo, es decir que $h_o > h_f$.